

Digitálne príbehy v nelineárnych dynamických ekonomikách v diskretnom čase¹

Ladislav ANDRÁŠIK*

Digital Stories in Non-linear Dynamical Economies in Discrete Time

Abstract

Advanced simulation and/or experimentation in virtual laboratories help to better understand the complex economic phenomena without sophisticated mathematical skills. That is useful for acquiring economic knowledge too. Economic laboratories created in Excel and STELLA for analysing dynamical behaviour of nonlinear economic models is exhibited. Such devices help to understand the complex behaviour of dynamic economic systems at least in qualitative imaginations. There are several cases of emergences of qualitative phenomena such as equilibrium-disequilibrium, bifurcation to orbit with several periods and/or to deterministic chaos in simple discrete non-linear systems. In order to demonstrate this, we used an example of Day's descriptive theory of economic growth with environmental factors, and Hermann's modification of Kaldorian cyclical growth.

Keywords: basins of attraction, cobweb simulation, cyclical growth, chaos, ecological approach, dynamics, logistic maps, manifolds, Verhulst function, virtual laboratory

JEL Classification: B40 – 41, CO2, C15, C29, C39, C60 – 65, C70, C88, C91, D40 – 43, D84, E12, E32

Úvod

V konvenčnej ekonómii, resp. v MSE² sa väčšinou stretávame s dobre fungujúcimi systémami. Inak povedané, systémy sa správajú tak, ako si to sám ekonóm predstavuje, či očakáva, že by sa mali správať. Problémom tejto ekonómie je

* Ladislav ANDRÁŠIK, Slovenská technická univerzita, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Katedra ekonómie a manažmentu, Il'kovičova 3, 812 18 Bratislava 1; Ústav manažmentu, Vazovova 5, 812 43 Bratislava 1; e-mail: ladislav.andrasik@stuba.sk

¹ V tejto stati sa použili výsledky výskumu podporovaného grantom VEGA 1/0877/08.

² *Main Stream Economics* – ekonómia hlavného prúdu, t. j. prevažne neoklasická ekonómia „moderného strihu“.

však to, že hospodárstvo sa v objektívnej realite v prevažnej miere takto poslušne nespráva, čo zaiste netreba zvlášť dokazovať. Aj preto niekedy vzniká diskrepancia medzi tým, čo rieši štandardná ekonómia, a čo „rieši“ živá, žijúca ekonomika. Jej príčina je spravidla výsledkom zjednodušujúcich predpokladov, neprimeraných abstrakcií a snahy niektorých ekonómov pripisovať objektívnej realite vlastnosti, ktoré v skutočnosti nemá. Preto sa v bežnej ekonomickej literatúre niekedy riešia systémy, ktoré umožňujú ísť „ľahšou cestou“, teda systémy ktoré sú jednoduché lineárne, rovnovážne, stabilné, statické atď., no pritom tie zložitejšie z nich takisto môžu mať nežiaduce vlastnosti, ako je nerovnovážnosť, nestabilita a pod. Je to však v rozpore s objektívnou realitou, ktorá nie je jednoduchá nelineárna [1; 2; 3; 6], dynamická, ba je dokonca evolučná v ekologickom³ zmysle tohto slova. V takom prípade ale vznikajú niektoré metodické a nástrojové ťažkosti pre menej matematicky erudovaných ekonómov, čo môže u jednotlivcov vyvolať až averziu k uvedenej problematike.

Napriek uvedeným súvislostiam sa nazdávame, že existuje veľa dobrých dôvodov, aby sa aj v bežnej ekonómii priznalo, že v hospodárskej realite sa veci nemajú tak, ako sa zvyknú opisovať v niektorých učebniciach alebo neraz aj vo vedeckých spisoch. Preto pred uvedenou realitou netreba ustupovať, ale treba ju riešiť, a to nielen v úzkej vedeckej komunite. Našťastie tu svitá nádej aj pre matematicky menej zdatných ekonómov. Bez osobitného dokazovania konštatujeme,⁴ že rozvoj informačno-komunikačných technológií (IKT), softvérového inžinierstva a umelej inteligencie vychádza v ústrety nielen im, ale dokonca aj matematicky erudovaným odborníkom, pretože aj im mimoriadne uľahčuje ich prácu.

Na niektoré súvislosti uvedeného problému chce poukázať táto stať. V snahe nezaťažovať čitateľa úlohou naučiť sa programovať, snažíme sa používať pokiaľ možno najjednoduchšie postupy, a to v prostrediach, ktoré sú bežne dostupné a využívané aj v našich podmienkach, totiž v Exceli a v STELLE [1; 2; 7; 15].

V prvej časti podávame základnú informáciu o nelinearitách a nestabilitách v abstraktných, resp. ekonomicky bližšie neidentifikovaných systémoch. V druhej časti identifikujeme nelineárny dynamický systém ako ekonomickú úlohu deskriptívneho

³ Treba zdôrazniť, že v slovenskej ekonomickej literatúre sa pojmom *ekologický prístup* dost často akosi „ad hoc“ či podvedome chápe prístup, ktorý zohľadňuje kritériá ochrany životného prostredia. V tomto príspevku používame uvedený pojem v zmysle prístupov a metód ekológie ako vednej disciplíny, teda ide nám o ekologické vzťahy a väzby, ktoré sa vyskytujú v populáciách rôznych druhov ekonomických agentov. Napríklad súhra genotypu a fenotypu vo fylogénze druhov, ktoré majú medzi sebou ekologickú väzbu (ekologický systém dravec – korisť, konkurencia, symbióza, mutualizmus a pod.), vyúsťuje v evolúcii do emergencie nových kvalitatívnych stavov či režimov, teda do sukcesie.

⁴ S využívaním prostriedkov IKT, internetu, komerčných alebo aj vlastných softvérov, ktoré uľahčujú ekonomickú analýzu a aj difúziu takto získaných poznatkov v širokom spektre úloh, máme dlhoročné pozitívne skúsenosti. Informovať o nich by však vyžadovalo priestor viacerých príspevkov, ktoré sú štandardom pre Ekonomický časopis. Takže zostávame iba pri všeobecnom konštatovaní.

rastu. Možné príčiny nelinearity a nestability v hospodárskom raste vysvetľujeme v tretej časti na základe záťaží prirodzeného prostredia, vznikajúcich v dôsledku neprimeraného rastu ľudskej populácie a tým vznikajúceho prílišného tlaku na rast investícií. Napokon vo štvrtej časti sa podrobnejšie zaoberáme dôsledkami zavedenia sigmoidného tvaru grafu investičnej funkcie v modeli cyklického rastu, ktorého pôvodným autorom bol N. Kaldor. Hlavný prínosom má byť demonštrácia, že virtuálne laboratória pomôžu lepšie porozumieť ekonomickým hlavolamom⁵ aj menej matematicky erudovaným ekonómom a tak získať kvalitnejšie a trvalejšie vedomosti.

1. Cykly a jednodimenzionálny deterministický chaos v diskretnom nelineárnom systéme

Uvažujme diskretný jednodimenzionálny systém v štandardnom (všeobecnom) matematickom zápise

$$x_{t+1} = f(x_t, \lambda) \text{ s tým, že } x_t \in R \text{ a } \lambda \in R \quad (1)$$

kde x_t je stavová premenná a λ je parameter. Aby sme zvýšili názornosť, uvažujme konkrétnu obmenu (1) napríklad v podobe konkávnej kvadratickej funkcie

$$x_{t+1} = f(x_t, \lambda) \equiv \lambda x_t (1 - x_t), x_t \in [0, 1], \lambda \in [0, 4] \quad (2)$$

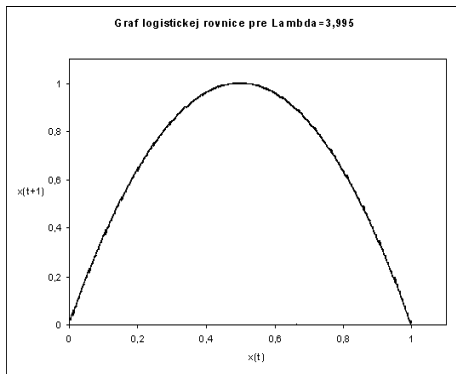
ktorá je z biológie známa ako *Verhulstova funkcia* či *Verhulstova dynamika* alebo všeobecnejšie ako *logistická rovnica*. Takýto útvar sa dá dobre spoznávať aj pomocou vhodných appletov tak, že hodnoty experimentu sa menia posúvaním jazdca na „reostate“.⁶

Grafom funkcie (2) v dvojrozmernom priestore x_t a x_{t+1} je parabola, ktorú možno ľahko skonštruovať v Exceli, a to sme aj urobili na obrázku 1. Vzhľadom na to, že konštrukcia je síce ľahká na postup, ale manuálne prácna a zaberá priveľký priestor v hárkoch Excelu, rozhodli sme sa nezaradiť priamo snímky simulácií, ale uvádzame len ich grafické výsledky v sérii snímok. Zvolili sme si nasledovné údaje $x_{t=0} = 0.2$, $\lambda = 3.995$, kroky času $DT = 1$.

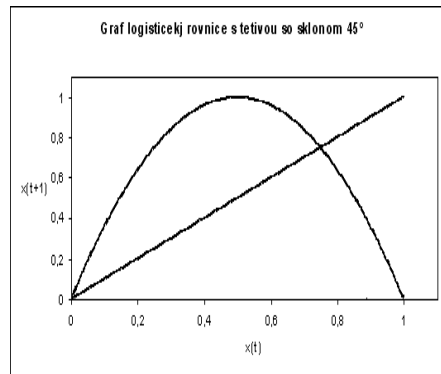
⁵ Dynamický jav, ktorý treba opísať náročným matematickým formalizmom a ktorý navyše vyžaduje zložité postupy riešenia, ba dokonca môže nemať analytické riešenie, obvykle označujeme v našich prácach obrazne pojmom *hlavolam*. Ide napríklad o také dynamické systémy, ktoré majú v riešení orbity s viacnásobnými periódami, prípadne majú charakter Neimarkovej-Sackerovej bifurkácie, alebo dokonca môžu bifurkovať do deterministického chaosu. Keďže spoločenské hospodárstvo môžeme chápať ako multiagentový systém, tak spoznávanie správania takého systému môže byť naozajstným hlavolamom.

⁶ Zaujemca, ktorý má lacný prístup na internet, nájde taký applet na stránke: <<http://alife.tuke.sk/~palkom/bio-nove/LogistickaRov/applet/javaapplet.htm>>, a môže si vyskúšať rozličné prípady evolúcie opísanej Verhulstovou funkciou.

Obrázok 1



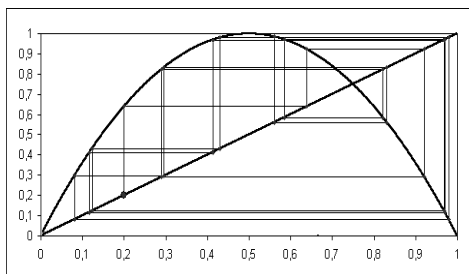
Obrázok 2



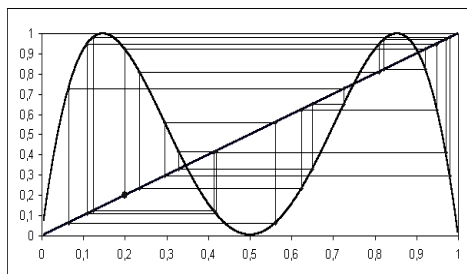
Priesečník grafu funkcie s tetivou pod sklonom 45° môže byť potenciálne dosiahnuteľným bodom rovnováhy. Keďže ide vlastne o parabolú s exponentom 2, bude závisieť od hodnoty parametra λ , či evolúcia bude z dajakého začiatočného bodu $x_{t=0} = x_0$ naozaj konvergovať k tejto rovnováhe alebo k dajakej stabilnej orbite, či sa dokonca bude generovať nestabilita.

Pavučinová evolúcia⁷ na obrázku 3 ukazuje pohyb podobný deterministickému chaosu – evolúcia sa začala z bodu $x_0 = 0.2$.

Obrázok 3



Obrázok 4

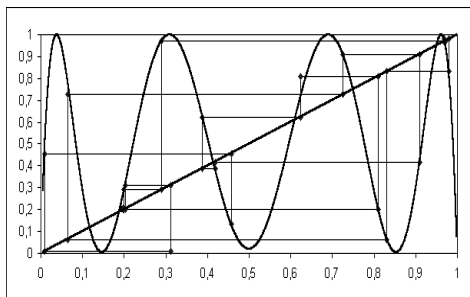


Pavučinová evolúcia na obrázku 4 znázorňuje príbeh na orbite „2“, t. j. x_t verus x_{t+2} . Aj v tomto prípade sa evolúcia začala z bodu $x_0 = 0.2$. Pavučinová

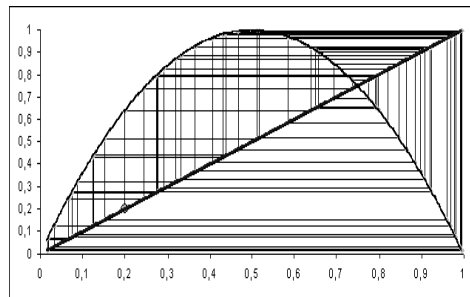
⁷ *Verhulstova funkcia* pôvodne predstavovala formalizmus na vyjadrenie dynamiky biologickej populácie, teda vlastne evolúciu počtosti populácie alebo hustotu populácie v dajakom prostredí s obmedzenými zdrojmi. Ak je, veľmi zjednodušene vzaté, rýchlosť množenia populácie (t. j. v tomto prípade sa koeficient λ takto interpretoval) väčšia ako úživnosť prostredia, populácia začne hynúť v dôsledku hladovania, až kým jej početnosť neklesne na úroveň, ktorá je primeraná ponuke obživy. Takto sa môže vynoriť evolúcia v podobe orbity s dvomi periódami, pri vyššej hodnote λ s viacerými periódami, napokon pri veľmi vysokej hodnote λ môže systém bifurkovať do deterministického chaosu. Tieto prípady, podobne ako ten na obrázku 3, sme simulovali v našom laboratóriu vytvorenom v Exceli a uvádzame ich na nasledovných snímkach (obr. 3 – 6).

evolúcia na obrázku 5 znázorňuje príbeh na orbite „3“, t. j. x_t verzus x_{t+3} . Aj v tomto prípade evolúcia začala z bodu $x_0 = 0.2$. Na obrázku 6 je znázornená situácia, keď sa λ tesne priblíži k hornej hodnote $\lambda = 4$; tu už jasne vynikne zložité správanie logistickej rovnice pri vysokých hodnotách parametra λ .

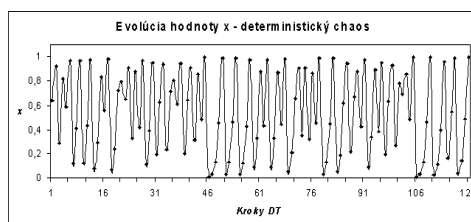
Obrázok 5



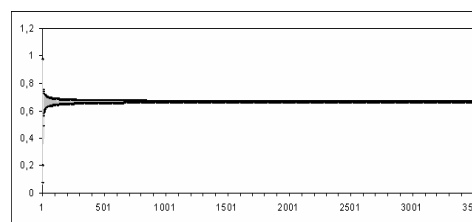
Obrázok 6



Obrázok 7



Obrázok 8



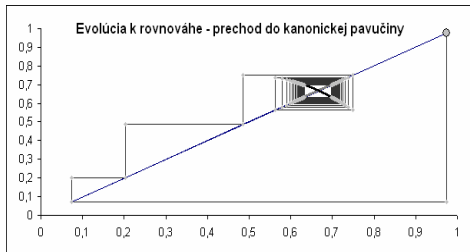
Na obrázkoch 7 a 8 sú pre inú (možnože aj lepšiu) názornosť uvedené snímky urobené ako „pavučinové“ animácie „rozťahnuté“ do krokov dĺžky $DT = 1$. Na obrázku 7 je jasne vidieť fluktuácie hodnoty x takmer v celom intervale $0 < x \leq 1$, kým na obrázku 8 je tlmená oscilácia konvergujúca k rovnováhe. Vidíme tu však veľmi pomalú konvergenciu – tlmená oscilácia dosiahne konštantnú a rovnovážnu hladinu x zhruba po 900 krokoch evolúcie.

Na obrázkoch 9 a 10 je snímka z experimentu s hodnotami $\lambda = 3$, $x_t = 9.985$, a aby bolo jasnejšie vidieť časť pavučiny (ako si ju bežne predstavujeme⁸) z obrázku 9, zmenšili sme x_t na $x_t = 9.75$ a túto plochu sme vystrihli, čo vidno na obrázku 10 – ukazuje časť tvaru pavučiny „v bežnom zmysle“ pozitívnu na vizualizáciu evolúcie. Ide tu teda o zväčšeninu príbehu z obrázku 9.⁹

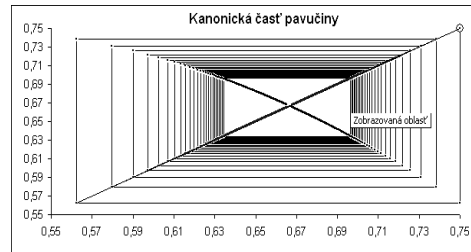
⁸ Predstava pravidelnej pavučiny vznikla na základe pozorovanej pavučiny pavúka križiaka. Väčšinou sa tak aj zobrazuje – takto sa sformovala v obecnom povedomí akási „kanonická“ predstava pavučiny. Ak sa však znázorňuje evolučná trajektória deterministického chaosu, tak táto pravidelnosť sa vytráti.

⁹ Výsledný (resp. koncový) stav evolúcie sa v Exceli dá dosiahnuť aj tak, že na vytvorenie grafu použijeme výsledky výpočtu z príslušného počtu riadkov a/lebo stĺpcov – podľa toho, ako sme si

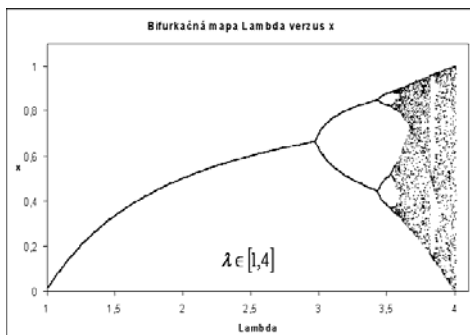
Obrázok 9



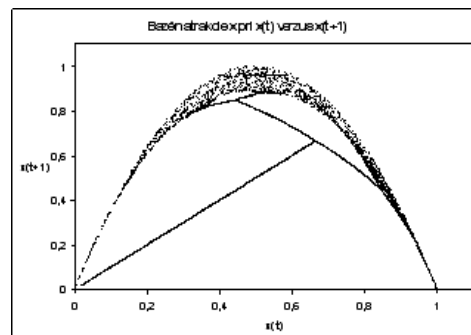
Obrázok 10



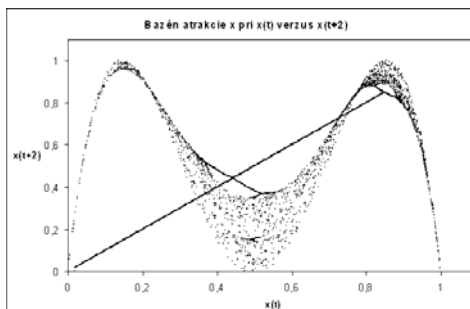
Obrázok 11



Obrázok 12



Obrázok 13



Ďalším nástrojom, ktorý si možno vytvoriť aj v tabuľkovom procesore Excel, je bifurkačná mapa. Systém, ako je ten na obrázku 11, je príkladom bifurkačnej mapy, keď hodnota koeficientu λ je z intervalu $\lambda \in [1; 4]$: vľavo, pri nižších hodnotách je riešenie sústavy rovnovážne, vpravo, pri vyšších hodnotách λ sa však objavujú bifurkácie (zdvojnásobovanie periódy – *period doubling bifurcation*,

usporiadali výpočet. V niektorých softvéroch, napríklad v iDmc, je na posun (tranzíciu) vytvorený špeciálny nástroj, ktorý umožňuje zviditeľniť graf od daného kroku zvoleného v na to určenom okienku, takže vlastne možno presne nastaviť interval zobrazenia evolúcie.

resp. *flip bifurcation*), t. j. keď pri $\lambda > 3$ mapa vyzerá, akoby to bol systém s vlastnosťami *štruktúrnej nestability*. Ide o to, že taký dynamický systém by menil svoje správanie už pri veľmi malej perturbácii¹⁰ vektorového poľa.¹¹

To, čo sme tu uviedli, sa bude ešte výraznejšie týkať príbehu s modelom *cyklického rastu* kaldorovského typu, ktorý ukážeme v jednom z ďalších odsekov. Pre charakteristiku dynamiky nelineárneho systému a pre väčšiu názornosť riešení modelov skonštruovaných na základe *Verhulstovej dynamiky* býva výhodné ukázať situáciu v tzv. *bazéne atrakcie*.¹² Ten sa vytvorí tak, že hodnota λ sa zvyšuje vo veľmi malých krokoch od dakej východiskovej hodnoty väčšej o infinitezimálne malú hodnotu od nuly, resp. sa znižuje od maximálnej hodnoty, t. j. od $\lambda = 4$. Výsledok takejto evolúcie sa vynesie do súradnicovej sústavy x_t verzus x_{t+1} , ako to vidno na obrázku 12, alebo do súradnicovej sústavy x_t verzus x_{t+2} , táto situácia je na snímke na obrázku 13. Všetky výsledky a snímky z experimentov obrázkov 1 až 13 sa dajú dobre identifikovať¹³ napríklad v oblasti populačnej dynamiky, ako aj v rovine viacerých iných sociálnych a humanitných vied.

2. Nelinearity v deskriptívnej teórii rastu – Dayho model

Verhulstova funkcia môže za určitých okolností slúžiť ako „metaforický prekurzor“ pre niektoré dynamické modely v ekonómii. Príkladom môže byť *deskriptívna teória ekonomického rastu*. Ak chceme pomerne jednoducho identifikovať chaotické správanie ako ekonomický systém, o ktorom sme už hovorili, stačí mierne modifikovať konvenčný neoklasický model rastu a transformovať

¹⁰ Treba však poznamenať, že oba termíny, t. j. *štruktúrne nestabilný systém* aj *malá perturbácia* sú pomerne vágne aj v užšej matematickej komunite (t. j. medzi skupinou topologikov), takže ich používame aj v tejto stati iba ako voľné metafory. Voľne povedané, systém sa stáva štruktúrne nestabilným vtedy, keď stačí aj dostatočne malá perturbácia vektorového poľa na to, aby prestal byť topologicky ekvivalentným s pôvodným systémom.

¹¹ Keby sme pracovali v softvéri MATHEMATICA (Wolfram), vektorové pole by sme mohli vytvoriť aj pre tu vysvetľovaný problém. Ale sú aj iné možnosti, napríklad jeden zo študentov (V. Bachratý z FIIT STU) vytvoril ako semestrálnu prácu softvér na vizualizáciu dynamických ekonomických systémov, ktorým možno vykresliť vektorové pole a tento nástroj vystavil aj na internet (link na stránku: <<http://student.fiit.stuba.sk/~bachratv02/mes>>). Dá sa v ňom vytvoriť aj *absorpčná oblasť*.

¹² Bazén atrakcie možno považovať za *terminus technicus* (*basin of attraction*). Pre vednú intersubjektívitu pojmov by bolo vhodné tento termín adoptovať aj do slovenskej ekonomickej terminológie. Jeden z anonymných recenzentov tejto state, ktorému som vďačný za viaceré postrehy a nápady, navrhol slovenský termín *spádová oblasť*, ktorý tiež presne vystihuje podstatu veci.

¹³ Takýto simulačný aparát sa hodí na zviditeľňovanie rozličných evolučných príbehov vo viacerých vedných triedach. Samozrejme, každý vedný odbor si ich obsah identifikuje po svojom.

ho do diskrétného času.¹⁴ Inými slovami, neoklasický model upravíme tak, aby mal vlastnosti už uvedenej logistickej funkcie, resp. rovnice.¹⁵ Môžeme ho, pred príslušnými zjednodušeniami, vyjadriť nasledovnými rovnicami a funkciami:¹⁶

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t \\ I_t &= K_{t+1} \\ S_t &= Y_t - C_t = sY_t \quad s > 0 \\ Y_t &= F(K_t, L_t) \\ L_t &= (1+n)^t L_0 \quad n > 0 \end{aligned} \quad (3)$$

pričom symboly sme použili tak, ako je to bežné v ekonómii, n je miera rastu ponuky pracovnej sily a s je konštantná marginálna miera úspor. Stupeň lineárnej homogenity produkčnej funkcie je jednotka a predpokladáme, že kapitálová vybavenosť v budúcom roku je závislá od marginálnej miery úspor

$$\frac{K_{t+1}}{L_t} = sF(K_t, L_t) \frac{1}{L_t} \quad (4a)$$

alebo po prijatí konvencie, že po delení (4a) premennou L sa budú používať malé písmená, t. j. $K_t / L_t = k_t$

$$k_{t+1}(1+n) = sf(k_t) \quad (4b)$$

kde k_t bežne chápeme ako kapitálovú vybavenosť práce. Vzťahy (4a, b) by sme mohli považovať za veľmi zjednodušenú modifikáciu modelu rastu Solowa-Swana [17; 18]. Zjednodušenú produkčnú funkciu zapíšeme v podobe

$$\frac{Y_t}{L_t} = f(k_t) = \Omega k_t^\beta (m - k_t)^\gamma, \quad k_t \leq m = \text{konšt.} \quad (5)$$

Rozdiel $(m - k_t)$ vyjadruje jednotkový negatívny vplyv investícií v zmysle všeobecnej záťažovej priemyselnej výroby na životné prostredie. Je zrejme, že dať jaká (daná, zvolená) konštantná hodnota m zavádza do vzťahu (5) akúsi úroveň nasýtenosti, pretože približovaním k_t k hodnote m jednotkový output klesá, prípadne až k nule, ak sa dosiahne rovnosť $k_t = m$. Keď pravú stranu (5) dosadíme do (4) po úprave

¹⁴ S podobnými pokusmi sa začalo na prelome 70. a 80. rokov. Známym sa stal najmä prístup, o ktorom referoval R. Day v [4]. V tých časoch (koniec 70. a začiatok 80. rokov) som publikoval v Ekonomickom časopise niekoľko statí na podobnú tému.

¹⁵ V uvedenej sústave funkcií a rovníc sa niektoré vzťahy môžu javiť z pohľadu konvenčnej ekonomickej vedomosti ako nelogické, či dokonca chybné, napríklad ten, v ktorom sa celý dôchodok premieňa na investície. Tieto zjednodušenia sa urobili pre zreteľnejšiu vizualizáciu zložitosti v dynamickom procese.

¹⁶ Treba poznamenať, že sa tu predpokladá úplné znehodnotenie kapitálu v danom hospodárskom roku, to znamená, že terajšie investície sa stávajú kapitálom v nasledujúcom roku.

$$k_{t+1} = \frac{s\Omega k_t^\beta (m - k_t)^\gamma}{(1+n)} \quad (6)$$

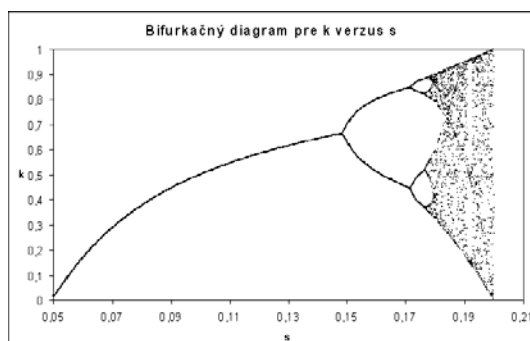
Len v záujme toho, aby sme mohli jasnejšie ilustrovať identifikáciu možného ekonomického obsahu logistickej funkcie, zavedieme dočasné zjednodušenie,¹⁷ a to tak, že $\beta = \gamma = m = 1$. Takto sa vzťah (6) zredukuje

$$k_{t+1} = \frac{s\Omega k_t(1 - k_t)}{(1+n)} \text{ a po úprave na } k_{t+1} = \frac{s\Omega}{(1+n)}(1 - k_t) \quad (7)$$

a keď zlomok vo vzťahu (7)¹⁸ substituujeme za λ , t. j. $\lambda = \frac{s\Omega}{(1+n)}$, a k_t dosadíme za

x_t , dostaneme pôvodnú Verhulstovu dynamiku (2) z predchádzajúcej časti. Inými slovami, všetko to, čo sme v tom odseku predviedli, platí kvalitatívne aj pre ekonomický model (7), teda v snímkach obrázkov 1 – 13 stačí nahradiť symboly x za k a grafické výsledky budú svojím tvarom platiť aj pre (7), takže ich teraz netreba znovu ukazovať. Presvedča nás o tom snímka na obrázku 14, ktorá je kvalitatívne úplne podobná situácii na obrázku 11. Navyše sme získali to, že dekompozícia λ na $\lambda = \frac{s\Omega}{(1+n)}$ nám umožňuje riadiť evolúciu aj parametrami s , Ω a n .

O b r á z o k 14

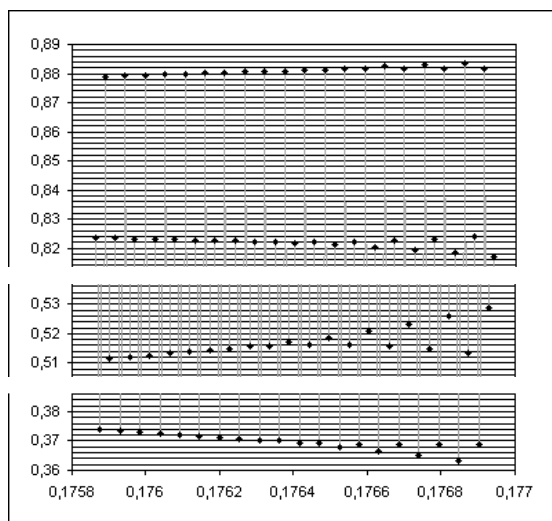


¹⁷ Aby sme čitateľa nepomýlili, treba zdôrazniť, že sa to naozaj robí len v záujme ilustrácie kvalitatívnej podobnosti oboch príbehov a toho, že simulácie pomocou podobných funkcií, ako je Verhulstova, sú výhodné aj v ekonomických prípadoch. Takže tu netreba hľadať hlboký ekonomický obsah, ale ukážku nástroja. Keby sa totiž zahrnuli všetky relevantné ekonomické predpoklady, príklad by bol pre túto ilustráciu ťažkopádny. Isteže by sa dal použiť aj zložitejší prípad deriváciou (7) podľa k_t , t. j. dk_{t+1}/k_t a výsledok sa položí rovný nule, ale požiadavky na rozsah state to neumožňujú. Napokon aj tento jednoduchší príklad kladie značné nároky na pochopenie, lebo predpokladá určité matematické zručnosti.

¹⁸ Tento vzťah vlastne generuje bifurkačnú mapu, keď na horizontálnej osi je k_t a na vertikálnej k_{t+1} .

Experiment bol s mierou úspor s v rozsahu $s \in [0.05, 0.2]$, konštantná miera rastu ponuky práce je $n = 0.0025$ a parameter Ω je $\Omega = 20.05$. Na obrázku 14 je zase bifurkačná mapa,¹⁹ ale tentoraz miery úspor, na ktorej vidíme, že s rastom miery úspor rastie podiel kapitálu, a to rovnovážne v skrátenom intervale $s \in [0.05, 0.15]$, na konci neho hodnota k dosiahne úroveň $k = 0.698$. V bode $s = 0.15$ nastane štiepenie (bifurkácia), stratí sa stabilita a utvorí sa cyklus, ktorého amplitúda sa stále viac a viac roztvára. Pri dosiahnutí úrovne $s = 0.1715$ sa amplitúda k dostala na rozpätie medzi hornú úroveň $k_{horné} = 0.8459387$ a dolnú úroveň $k_{dolné} = 0.4419241$ a vzniká štvoritá vidlica, ktorá sa ďalej roztvára. Po dosiahnutí úrovne $s = 0.1763$ nastane ďalšia bifurkácia a utvorí sa osemnásobná vidlica. Aj táto vidlica sa ďalej roztvára, ako je to zrejmé z obrázku 15. Na tejto snímke vidíme prechod zo štyroch úrovni na osem. Pri ďalšom zvyšovaní miery úspor sa počet úrovní zase zdvojnásobí tentoraz na 16.

Obrázok 15

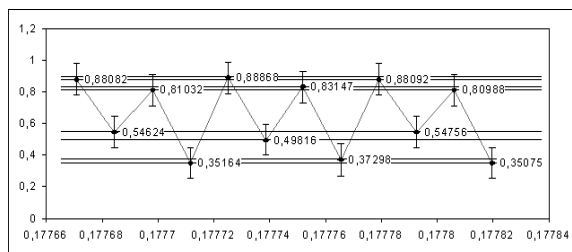


To sme ilustrovali na obrázku 16. Intervaly sa stále skracujú a pri úrovni úspor $s \approx 0.1875$ systém prechádza do chaosu. Aj túto snímku, a vlastne prevažnú väčšinu z nich uvádzame len pre lepšiu názornosť. Problém je totiž v tom, že v prípade tlače na papier strácame všetky výhody, ktoré máme pri experimentovaní vo virtuálnom laboratóriu. Aj toto je, hoci nepriamo, jasný dôkaz výhodnosti práce vo virtuálnom laboratóriu. To, čo pri experimentovaní možno priamo pozorovať, zisťovať, a následne ihneď na to reagovať zmenou parametrov, v tlačenej

¹⁹ Treba si uvedomiť, že tu ide len o vzťah s verzus k , teda, že tu nefiguruje čas (počítačový čas používame len na posúvanie hodnôt s a výpočet k , a nie na evolúciu systému).

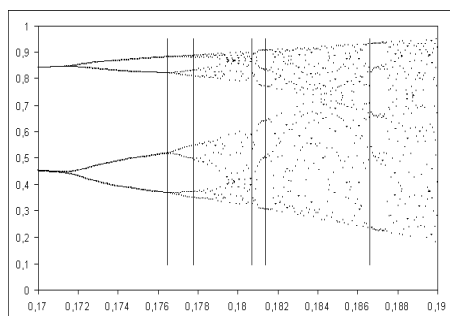
formáte musíme na to používať zložitú verbálnu deskripciu a aj tak sa nám nepodarí vystihnúť všetky nuansy toho, čo nám dáva experiment vo virtuálnom laboratóriu. Obrázok 16 ukazuje, ako porovnaním čísiel zisťujeme, že cykly majú už 16 úrovní.

Obrázok 16

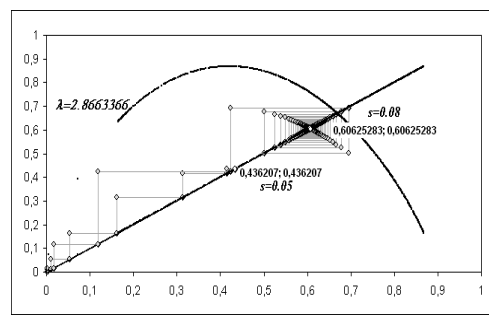


Na tejto snímke vidíme zaujímavé pasáže miery úspor v intervale $s \in [0.17, 0.19]$. Napríklad v okolí hodnoty $s = 0.1763$ je prechodový režim zo štyroch úrovní na osem, alebo *hrana chaosu*²⁰ je napríklad v intervale $s \in [0.1875, 0.1885]$. Ďalej už nasleduje len deterministický chaos až po úroveň $s = 0.2$. V Exceli sme urobili experimenty, aby sme demonštrovali jednak vplyv zmeny koeficientu úspor s samostatne, jednak zlomku, ktorý vyjadruje hodnotu λ . Na nasledovných snímkach je znázornená evolúcia so zdvojovaním períód a prechod k deterministickému chaosu (obr. 17), ako aj dva experimenty s hodnotami úspor voči vysokej hodnote λ (obr. 18). Hodnota Ω bola nastavená na $\Omega = 28.95$. Podrobnejšie sa touto témou zaoberáme v nasledujúcej časti. Na iné experimentovanie sme skonštruovali laboratórium aj v STELLE,²¹ v iDmc, v Simulinku (MATLAB) a v ďalších, či už v komerčných alebo vo vlastných softvéroch.

Obrázok 17



Obrázok 18



²⁰ Hrana chaosu je posledná bifurkácia, po ktorej sa trajektória už nezdojuje, ale nastupuje chaos.

²¹ Podobné modely nájdeme v publikáciách [1; 2; 7].

3. Hospodársky rast so zahrnutím záťaže životného prostredia v softvéri STELLA

Pri konštrukcii modelu rastu s negatívnym vplyvom na prostredie pre potreby modelu v STELLE mierne upravíme vzťah (6), aby sme mohli vytvoriť čo najjednoduchšiu blokovú schému. Východisková produkčná funkcia je teraz

$$q = \Omega k^\beta (m - k)^\gamma \quad (8)$$

kde

- q – output na jednotku pracovnej sily,
- k – kapitálová vybavenosť pracovnej sily,
- m – faktor záťaže životného prostredia,
- β, γ , a Ω^{22} – kladné čísla s rovnakým významom ako v predchádzajúcej časti.

Rozdiel $(m - k)$ by sa dal chápať ako odvod za poškodzovanie životného prostredia. Tak ako predtým, jednotkový kapitál bude rásť aj v tomto prípade diskretnými krokmi $DT = 1$, t. j. budeme pracovať so vzťahom

$$k(t+1) = \frac{(q - c)}{(1 + n)} \quad (9)$$

kde c je spotreba *per capita*, n miera rastu pracovnej sily, a považujú sa za konštanty. Ako je to v ekonómii zaužívané, jednotková spotreba závisí od rozdelenia outputu na spotrebu a investície, takže budeme mať ďalší vzťah

$$c = (1 - s)q \text{ alebo } s = (1 - c)q \quad (10)$$

Ako to všetko vzájomne skombinujeme a upravíme, dostaneme vzťah

$$k(t+1) = ak^\beta (m - k) \quad (11)$$

kde a identifikujeme ako konštantu podobnú logistickej λ , t. j. tak ako v predchádzajúcej časti $a = \frac{s\Omega}{(1 + n)}$. Na konštrukciu v STELLE potrebujeme z uvedených vzťahov získať Δk , teda vpravo zodpovedajúci požiadavkám STELLY²³

$$\Delta k = k(t+1) - k(t) = ak^\beta (m - k)^\gamma - k \quad (12)$$

²² Parameter Ω (úrovňovú konštantu) môžeme interpretovať aj ako *neutrálny technologický pokrok* v zmysle *J. Hicksa*.

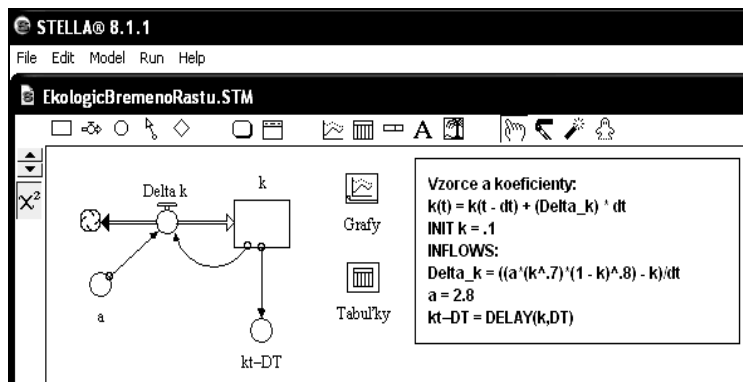
²³ Pri zapisovaní vzorcov a konštánt do stavebných modulov virtuálneho laboratória vytváraného v STELLE si treba dať pozor na niektoré odlišnosti v matematických konvenciách. Na trochu iné zapisovanie formúl sa však dá ľahko zvyknúť.

V logike STELLY je tento vzťah (12) prítokom do stavu v „nádrži“²⁴ k , ako je to zrejmé zo schémy na obrázku 18. Pomocou tohto úplne jednoduchého virtuálneho laboratória môžeme vygenerovať všetky grafy, ktoré sme už prezentovali, takže ich netreba opakovať. Teraz už nastala príležitosť ukázať niektoré prednosti STELLY voči Excelu pri experimentovaní. Na tento účel urobíme dekompozíciu koeficientu a , t. j. zlomok $a = \frac{s\Omega}{(1+n)}$, takže budeme môcť hýbať

parametrom s ako riadiacou pákou procesu, ba okrem toho explicitne uvedieme do toku $Delta\ k$ aj exponenty β a γ , takže budeme môcť tvarovať aj produkčnú funkciu.

Zo všetkých sa stanú riadiace parametre procesu, čo sme znázornili snímkami zo STELLY (obr. 19 a 20).

Obrázok 18



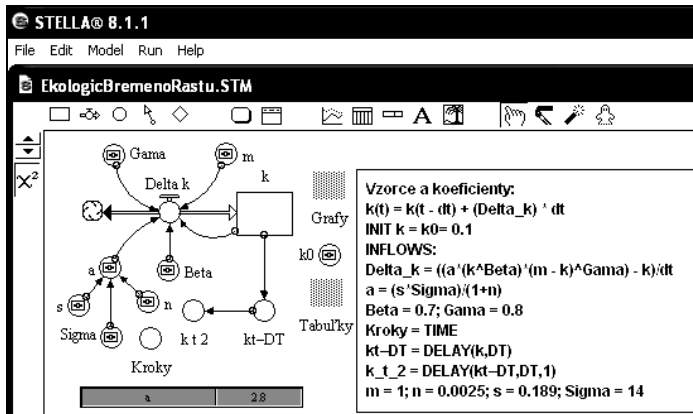
Na obrázku 20 vidíme vykreslený (zdanlivo spojitý) Hénonov atraktor. V skutočnosti ide o pomyselnú (potenciálnu) parabolu, na ktorú „si sadajú“ jednotlivé riešenia k_t verzus k_{t+1} . Čím vyššia bude úroveň s pri konštantnej hodnote Ω , tým viac sa bude dvíhať hladina a , takže za istou hranicou bude prudko pribúdať počet bodov riešenia,²⁵ a napokon ich bude toľko, že Hénonov atraktor sa bude

²⁴ Zdá sa byť prirodzené, že entita s vlastnosťou „stav“ potrebuje nádrž s prítokom a odtokom. Napríklad v tomto prípade „priteká do nádrže s obsahom k tok Δk “ $i \equiv \Delta k$ (pretože sa neuvažuje doba investičnej výstavby).

²⁵ Inými slovami, keďže rast riadiaceho parametra a vyjadruje zmenu zlomku $a = \frac{s\Omega}{(1+n)}$, teda to, že čitateľ rastie rýchlejšie ako menovateľ, proces prechádza z pásma orbit s vyšším počtom periód do deterministického chaosu. Dôležité je uvedomiť si, že všetky body riešenia sú na tomto Hénonovom atraktore, a napriek tomu, že pri zobrazení na časovej osi to vyzerá tak, ako keby išlo o stochastický proces, jednotlivé body sú súčasťou deterministickej množiny.

javiť ako spojitá parabola. Nastavenia jednotlivých parametrov modelu vidíme na „slajdoch“ vľavo. Podobný proces nastane pri konštantnej hodnote s a raste hladiny Hicksovho technologického pokroku Ω .

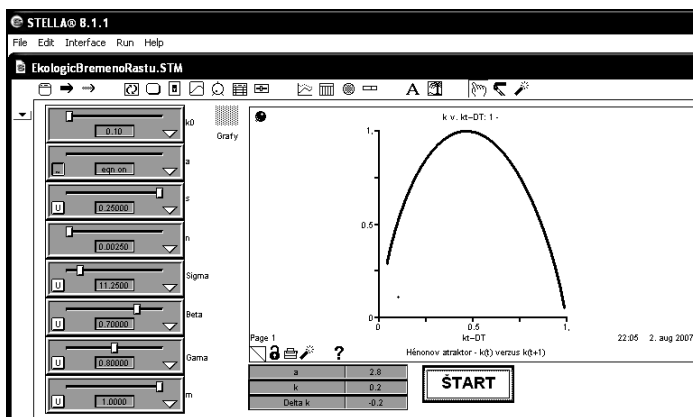
Obrázok 19



Tabuľka 1

s	0,2
k ₀	0,45
Lambda	3,9121951
Sigma	20,05
m	1
Gama	1
n	0,025

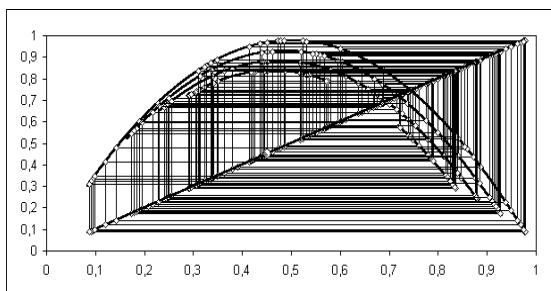
Obrázok 20



Tabuľka 2

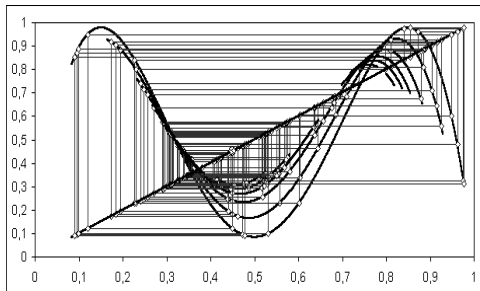
s	0,2
k ₀	0,45
Lambda	3,9121951
Sigma	20,05
m	0,95
Gama	1
n	0,025

Obrázok 21

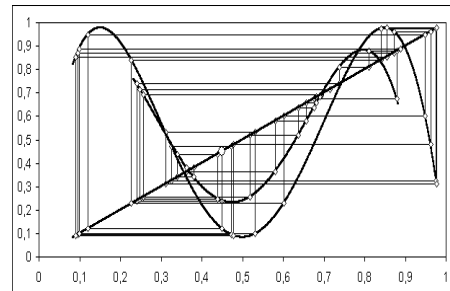


Experimentovanie s hodnotou $m = 1$; $m = 0.95$, pri k_{t+2} .

Obrázok 22

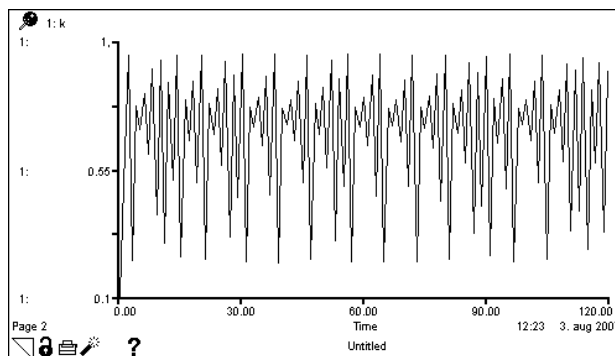


Obrázok 23

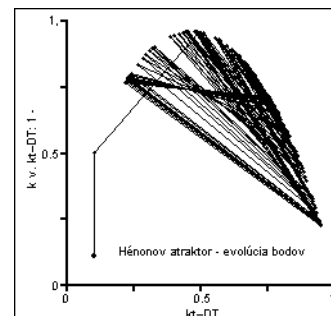


Experimentovanie s hodnotou $m = 0.915$; 0.925 ; 0.935 ; 0.95 ; 0.975 . Tu uvedené snímky mali za cieľ demonštrovať niektoré možnosti experimentovania s dynamickými ekonomickými systémami vo virtuálnych laboratóriách ktoré sme vytvorili v prostredí softvéru STELLA.

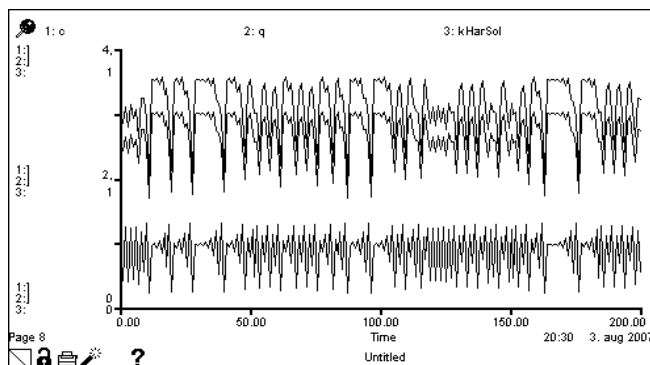
Obrázok 24



Obrázok 25



Obrázok 26



Náročky sme zvolili relatívne jednoduchšiu dynamickú úlohu, pretože sme si vedomí toho, aké nové, nekonvenčné nástroje prvotne predstavujeme čitateľom. Nazdávame sa, že na prvé zoznámenie sa s takýmito nástrojmi je lepšie voliť jednoduchšie a známejšie ekonomické úlohy, než hneď riešiť novú neznámu úlohu.

4. Hermannova modifikácia modelu cyklického rastu Kaldorovho typu

R. Hermann [8] v podkladoch k svojej dizertačnej práci vypracoval diskretnú verziu modelu cyklického rastu N. Kaldora [12] s cieľom ukázať, že po uvoľnení zjednodušení a abstrakcií, ktoré boli v pôvodnom modeli, nastanú v správaní systému veľmi zvláštne javy, okrem iného sa v modeli objaví deterministický chaos. Použijeme Hermannovu modifikáciu Kaldorovho modelu,²⁶ aby sme ukázali možnosti predvádzania príbehu prostredníctvom simulácie vo virtuálnom laboratóriu (digitálny príbeh), ktorý sme vytvorili v STELLE. Konvenčný zápis uvedeného modelu je nasledovný

$$\begin{aligned}\Delta Y_{t+1} &= \alpha \left[I(Y_t, K_t) + C^* - Y_t \right] \\ \Delta K_{t+1} &= I(Y_t, K_t) - \delta K_t\end{aligned}\quad (13)$$

s predpokladom, že $I(Y_t, K_t) = \beta(K_t^d - K_t) + \delta K_t$, kde $\beta > 0$, čo chápeme ako *hrubé (gross) investície*, a kde $\delta \in (0; 1)$ je miera znehodnotenia (amortizácie) kapitálu. Z konvenčnej ekonómie logicky vyplýva, že čisté investície budú proporcionálne možnému rozdielu medzi požadovaným a skutočným stavom kapitálu.²⁷ Ak požadovaná kapitálová zásoba závisí lineárne od outputu, t. j. ak $K_t^d = \kappa Y_t$, pričom $\kappa > 0$, a ak spotrebná funkcia má tvar „S“ (sigmoid) podobný investičnej funkcii Kaldorovej tradície, potom možno dvojicu funkcií (13) prepísať do explicitnej podoby na

$$\begin{aligned}\Delta Y_{t+1} &= \alpha \left[\beta(kY_t - K_t) + \delta K_t + C^* - Y_t \right] \\ \Delta K_{t+1} &= \beta(kY_t - K_t)\end{aligned}\quad (14)$$

ktorú môžeme použiť ako toky v STELLE, ktoré pritekajú do „nádrží“ Y a K. Schéma virtuálneho laboratória spolu s náplňou stavebných blokov je na snímke zo STELLY (obr. 27). Výpočet hodnoty C^* je tiež súčasťou schémy a parametre vo vzorci (15) sú nastavené tak, aby rovnovážna hodnota dôchodku bola 22.22

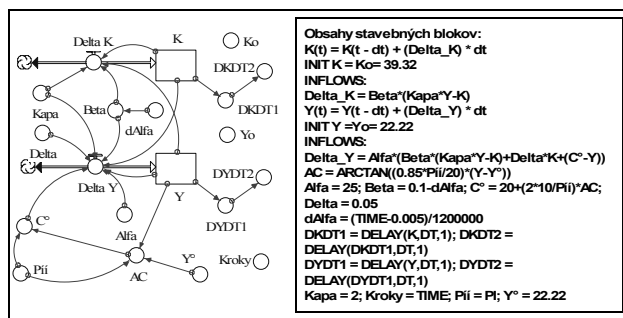
²⁶ Ako je známe, Kaldora v podobnom pokuse vysvetliť cyklický rast predbehol o tri roky poľský ekonóm M. Kalecki [13].

²⁷ Index d nad K je od anglického slova *desired* (potrebný, požadovaný, predpokladaný atď.).

$$C^* = 20 + \frac{20}{\pi} \arctan \left[\frac{0.85\pi}{20} (Y_t - Y^*) \right] \quad (15)$$

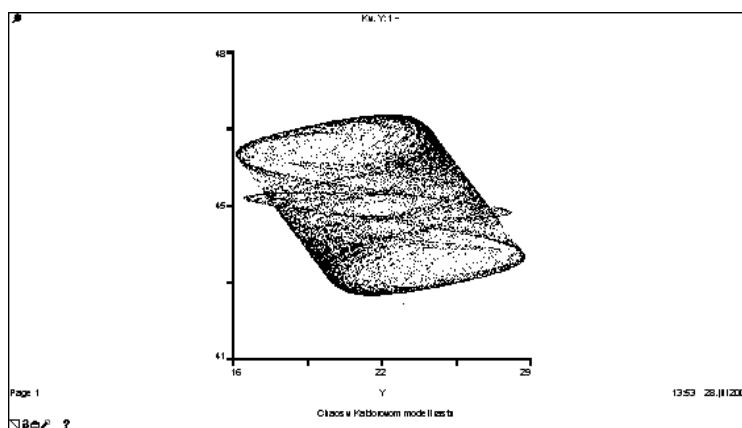
Intervaly, v ktorých sa pohybujú zvolené hodnoty jednotlivých parametrov, majú svoje hranice. Keď sa prekročia, systém skolabuje. Uvedený záver platí za predpokladu, že sa vyberie jeden parameter a ostatné sa ponechajú ako konštanty. Napríklad hodnoty, ktoré sú nastavené v experimente na obrázku 27, vytvárajú v priestore $[Y, K]$ grafický útvar pozostávajúci z diskretných bodov dĺžky $DT = 1$, znázornený snímku²⁸ na obrázku 28. Predmetné hodnoty parametrov boli zámerne zvolené tak, aby sa vytvoril tento, prípadne aj chaotický príbeh v modeli Kaldorovho typu, t. j. keď spotrebná funkcia C^* má *sigmoidnú tvar* ako investičná funkcia, teda podobný tvar, ktorý pôvodne predpokladal Kaldor.

Obrázok 27



Obrázok 28

Originálna snímka z experimentu vo virtuálnom laboratóriu, ktoré sme skonštruovali v STELLE

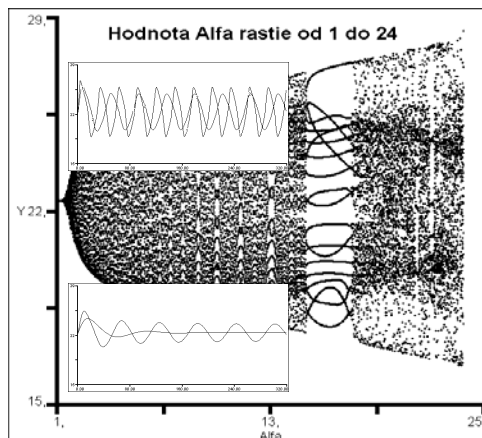


²⁸ Priame snímky grafov nebudeme ďalej uvádzať, pretože zaberajú priveľa miesta – vyrežeme z nich len obsah podstatný pre porozumenie problému.

Vyšetrovať pôsobenie krokových zmien v jednotlivých parametroch modelu skonštruovaného v STELLE je celkom jednoduché – stačí využiť počítačový čas. Použijeme ho buď na pridávanie, alebo uberanie hodnôt zvoleného parametra počnúc od zadanej východiskovej hodnoty a budeme sledovať zmeny buď priamo v súradnicovej sústave (obr. 29 [daný parameter, Y]) alebo nepriamo (obr. 30 [kroky DT , Y]), ale v tomto prípade, samozrejme, musíme pamätať, ktorý parameter simulujeme, pretože v grafe nevystupuje – je skrytý; v uvedenom prípade sme použili na experimentovanie hodnotu parametra α .

Na obrázku 29 jasne vidno, že pri hodnotách α tesne nad jednotkou sa hodnota Y_t správa tak, že fluktuácie sa utlmujú. Práve v záujme lepšieho vizuálneho vnemu sme vložili do obrázku 29 dodatočné grafy. Vidíme tiež, že s rastom hodnoty α sa nemení len amplitúda, ale aj frekvencia cyklu Y . Pri hodnotách α okolo 19 vidíme, že sa vytvorili dve úrovne cyklov, horná a dolná, pričom riešenie po istom počte krokov prechádza z hornej do dolnej úrovne a späť, ako to vidno na obrázku vľavo.

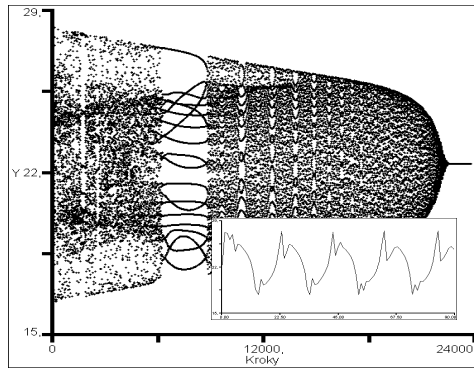
O b r á z o k 29



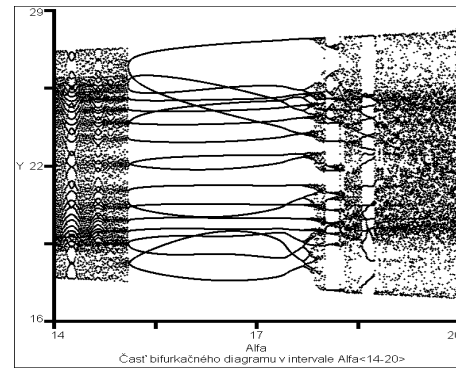
Pri vyšších hodnotách už systém prechádza do deterministického chaosu, ale je zaujímavé, že existujú rôzne bifurkačné pasáže (pozri obr. 31). Nečudo potom, že štatistické rady zachytené z reálnych ekonomických príbehov a vnesené do grafov vyvolávajú dojem, ako keby taký vývoj bol jednoznačne stochastický.

Prvky neurčitosti a náhodnosti sa celkom vylúčiť nedajú, resp. by to nebolo vedecky korektné, ale na druhej strane treba pripustiť, že v takom vývoji sú prvky deterministického chaosu vnesené do systému rôznymi objektívnymi, ale aj subjektívnymi vplyvmi – napríklad legislatívou hospodárskopolitickými opatreniami a podobne.

Obrázok 30

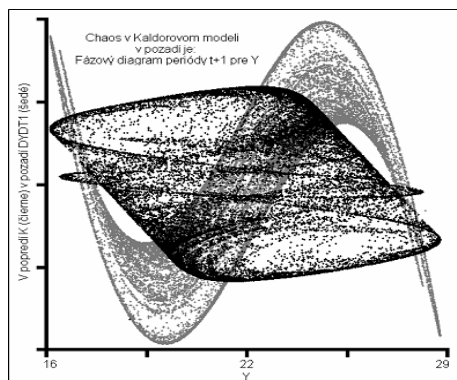


Obrázok 31

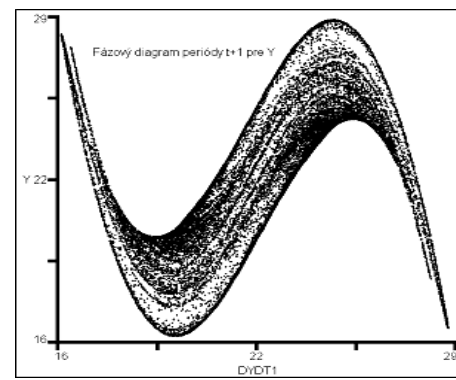


Na obrázku 32 vidíme v pozadí bazén atraktora (v sivej farbe). Sivá oblasť obsahuje začiatkové body, ktoré konvergujú smerom k atraktoru. Biela oblasť obsahuje začiatkové body, ktoré smerujú k nekonečnu. A na nasledovných obrázkoch 33 – 37 vidíme snímky bazénov atrakcie.

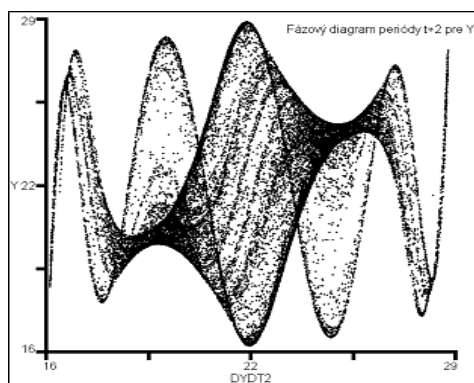
Obrázok 32



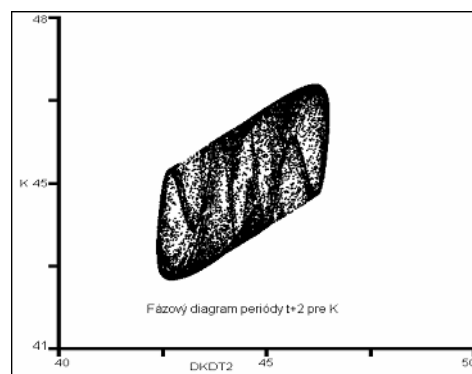
Obrázok 33



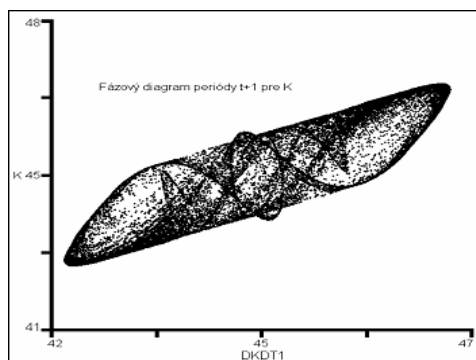
Obrázok 34



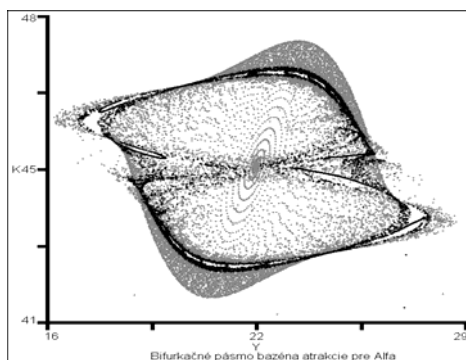
Obrázok 35



Obrázok 36

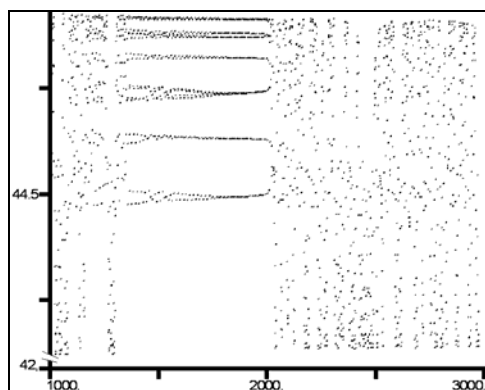


Obrázok 37

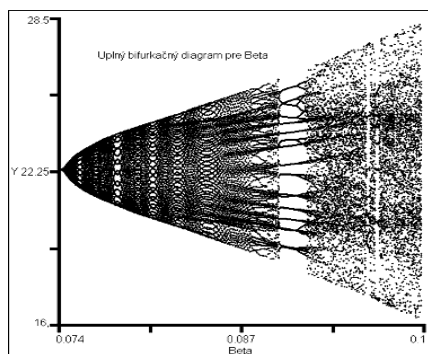


Sivá oblasť na obrázku 37 by sa mohla považovať za úplný bazén atrakcie. Čiernou farbou je znázornený výsek z evolúcie – zvýraznený je menovitý interval bifurkácií pre parameter α , v súradnicovej sústave Y versus K .

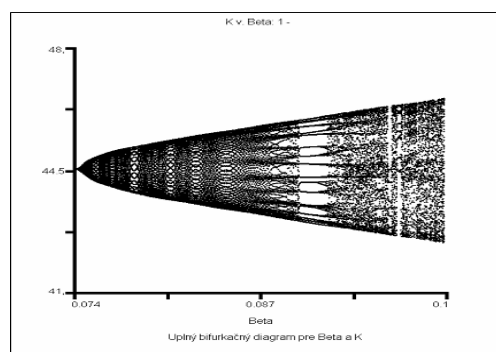
Obrázok 38



Obrázok 39

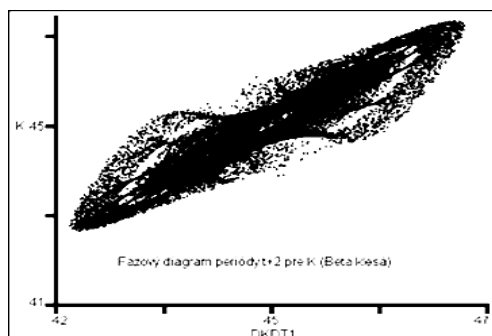


Obrázok 40

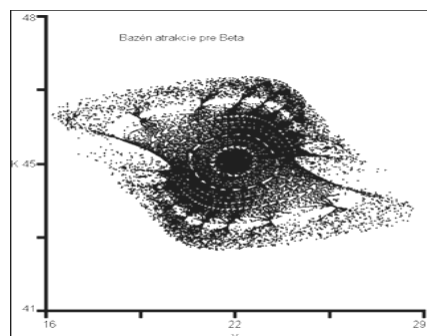


Na obrázku 38 ukazujeme výsek z bifurkačnej mapy v $\alpha \in [1000, 3000]$ na porovnanie s bifurkačnou mapou na obrázku 40. Pravda, v iných softvéroch, napríklad v iDmc, možno vygenerovať dokonalejší bazén atrakcie.

O b r á z o k 41



O b r á z o k 42



Záver

V tomto príspevku sme sa pokúsili – v rámci, v ktorom to vôbec umožňuje tlač na papieri – priblížiť vysokú názornosť a efektívnosť, ako aj kvalitu priamych experimentov vo virtuálnych laboratóriách, ktoré možno skonštruovať v bežne prístupných softvéroch. V záujme prístupnosti pre čo najširší okruh čitateľov sme použili najprístupnejšie a najjednoduchšie softvéry, a to tabuľkový procesor Excel a modelovací softvér STELLA. Získavanie a osvojovanie vedomostí, tvorba teórií a podobné činnosti v ekonómii sa dostávajú na výrazne vyššiu úroveň vďaka pokročilým informačným a komunikačným technológiám, ako aj výsledkom, ktoré sa dosiahli v teórii a metódach umelých experimentov za pomoci umelej inteligencie. Uvedené prednosti týchto prístupov a metód platia najmä v prípade zložitých, resp. v exaktnom zmysle slova komplexných ekonomických problémoch vyznačujúcich sa nelinearitou, nerovnováhou a nestabilitou.²⁹ Také systémy sú totiž najbližšie ekonomickej realite, na rozdiel od jednoduchých lineárnych a rovnovážnych systémov, ktoré sú konvenčnou náplňou ekonomického teoretizovania. Z takzvaných komplexných ekonomických systémov sme si však museli v záujme dobrej čitateľnosti vybrať relatívne známe modely. Menovite sme v príspevku použili neoklasické modely rastu so zahrnutím

²⁹ Prvým a vytrvalým presadzovateľom nelineárneho prístupu v ekonómii bol zrejme Richard Goodwin, ktorý ho v explicitnej forme spomenul vo svojej recenzii Hicksovej teórie cyklu [10]. V tejto recenzii jasne sformuloval tézu, že príčinou ustavične sa tvoriacich cyklov sú kritické nelinearity v trhovom ekonomickom systéme [6, s. 318], ktoré však lineárny prístup nevie náležite vysvetliť.

ekologickej dimenzie rozvoja a model cyklického rastu N. Kaldora [9]. Vzhľadom na to, že táto problematika je ešte stále len v začiatočnom štádiu rozvoja a v našich podmienkach ešte nie je organicky včlenená do ekonomickej literatúry, resp. aj ekonomická komunita ešte nie je v dostatočnej miere zručná vo využívaní náročnejšej triedy modelovacích prostriedkov, zámerne sme príspevok pripravili v čo najjednoduchšej podobe. Napriek tomu sme presvedčení, že môže byť prospešný pre ekonómov, ktorí chcú hlbšie študovať náročné ekonomické hlavolamy v súčasnej globálnej vedomostnej spoločnosti. Nazdávame sa totiž, že aj používanie pokročilých prostriedkov IKT a vymožeností umelej inteligencie a najnovších produktov softvérového inžinierstva patrí do teoretickej, metodologickej a zručnostnej výbavy v ére globálnej vedomostnej spoločnosti.

Literatúra

- [1] ANDRÁŠIKOVÁ, A. – ANDRÁŠIK, L.: Vztáhy ekologického typu v spoločenskom hospodárstve. Bratislava: Vydavateľstvo STU 2007.
- [2] ANDRÁŠIK, L.: Experience with Digital Story-telling in Social Sciences Education. [Proceedings of the 7th International Symposium on Computational Intelligence.] Budapest: Hungarian Fuzzy Association 2006.
- [3] BRUUN, Ch. et al.: Advances in Artificial Economics, The Economy as a Complex Dynamic System. Berlin: Springer-Verlag 2006.
- [4] DAY, R. H.: Irregular Growth Cycles. *American Economic Review*, 72, 1982, s. 406 – 414.
- [5] FARUKI, M. A. – KRISHNANIAH, J. – KUMAR, C. S.: Modelling and Control of Chaotic Processes. *Journal of Process Control*, 16, 2006, s. 67 – 79.
- [6] GOODWIN, R. M.: A Non-linear Theory of the Cycle. *Review of Economics and Statistics*, 32, 1950, s. 316 – 320.
- [7] HANNON, B. – RUTH, M.: Modeling Dynamic Economic Systems. Berlin: Springer-Verlag 1997.
- [8] CHIANG, A. C.: Fundamental Methods of Mathematical Economics. London: McGraw-Hill Co. 1984.
- [9] HERMANN, M.: Stability and Chaos in Kaldor-type Model. [Discussion Paper, No. 22.] Göttingen: University of Göttingen, Department of Economics 1985.
- [10] HICKS, J. R.: A Contribution to the Theory of the Trade Cycle. London: Clarendon Press 1950.
- [11] CCANG, W. W. – SMYTH, D. J.: The Existence and Persistence of Cycles in a Nonlinear Model: Kaldor's 1940 Model Re-examined. *Review of Economic Studies*, 38, 1971, s. 37 – 44.
- [12] KALDOR, N.: A Model of the Trade Cycle. *Economic Journal*, 50, 1940, s. 78 – 92.
- [13] KALECKI, M.: A Theory of the Business Cycle. *Review of Economic Studies*, 4, 1937, s. 77 – 97.
- [14] LORENZ, H-W.: Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion. Berlin: Springer-Verlag 1993.
- [15] LUNA, F.: et al.: Economic Simulation in SWARM: Agent-based Modelling and Object Oriented Programming. Boston: Kluwer Academic Publishers 2000.
- [16] PUU, T. Nonlinear Economic Dynamics. Berlin: Springer-Verlag 1997.
- [17] SOLOW, R. M.: A Contribution to the Theory of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70, 1956, č. 1, s. 65 – 94.
- [18] SWAN, T.: Economic Growth and Capital Accumulation. *Economic Record*, 32, 1956.